セルオートマトンの漸近挙動(生命的なものへの動力学アプローチ-変わることで意味をもつものの研究-(北大数学科複雑系数理グループ))

行木, 孝夫

セルオートマトンの漸近挙動

行木 孝夫

セルオートマトンとは空間・時間・状態の全てが離散値をとる力学系である。1950 年代に自己組織系のモデルとしてノイマンによって導入され、1980 年代にはウォルフラムらによって力学系的な視点からその挙動の分類が提唱された。近年は離散化した保存系のモデルとしても注目されている。

力学系としてセルオートマトンの挙動を見ると、アトラクタへ落ち込むまでの遷移的な状態に多様性が見られるようである。私はこれをエルゴード理論の観点から解析している。

状態空間として、有限集合 A の無限直積空間 $X = A^{\mathbf{Z}^\mathbf{D}}$ をとる。連続写像 $\tau : X \to X$ が次を満たす時、セルオートマトン (CA) とよぶことにする。

> $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\mathbf{D}$ を与えられた有限格子、f を Λ から A への写像とする。任意の $x \in X$ について一様に $(\tau x)_i = f(x_{i+j}; j \in \Lambda)$ となる。

すなわち、CA は空間的に一様な規則 f で時間発展を決める格子上の力学系である。一次元系 $D = 1$ で $A = \{0, 1\}$ とし、τ を $(\tau x)_i = x_{i-1} + x_{i+1} \bmod 2$ とすれば、簡単な例となる。

$X_0 = A^\mathbf{Z}$ とおき、$X_n = \cap_{k=1}^n \tau^k X_0$ を考えよう。X_n はランダムな初期配置から τ の n ステップ作用後に許容される配置の全体であり、各 n についてシフト不変集合となる。

エントロピーの時間発展を、$\nu = \mu \circ \tau^{-1}$ として $h_\mu \to h_\nu$ で定義する。つまり、エントロピーは格子上の確率測度の時間発展を反映するものと考える。このとき、エントロピーの時間発展 (減少度) について、

$$h_\mu(X_{n+1}, \sigma) \le h_\nu(X_n, \sigma) + \int_{X_n} h_d d\nu.$$

ここで、$d(w) = \# f_{|w|}^{-1}(w)$ は単語 w の多重度といい、$f_{|w|}(w)$ は w を像にもつ単語の全体を表す。$d(w)$ の指数関数的な発散のレートは次の極限であり、

$$h_d(y) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log d(w_n(y)) \tag{1}$$

これは $\nu - a.e.$ で存在する。また、確率測度として配位空間の平衡状態を与える Gibbs 測度をとれば、この不等式の等号が成立する。

> この結果はシフトの測度論的エントロピーという熱力学的な量のの時間変化が局所的な規則 f によって決まることを示している。

また、別の熱力学的な量である位相圧力 (自由エネルギー)$P(V, X_n)$ については不変集合を適切に定義するとその安定性に依存して収束の rate が決まることがわかっている。現在、それぞれ $O(e^{-nC})$, $O(e^{-\sqrt{n}C})$, $O(n^{-1}C)$ (C は定数) という挙動を示す例が構成できている。

このrateが遅いほど、数値実験で見ることのできる軌道は複雑な構造が長く維持されるように観測される。その時間は上記のrateによって決まるものであるから、fという局所的な規則が不変集合の安定性という幾何的な量を通じて自由エネルギーの時間変化を定めているといえる。

1 準備

有限集合Aの無限直積空間$X = A^{\mathbf{Z}^D}$をとる。連続写像$\tau : X \mapsto X$が次を満たす時、セルオートマトン(CA)とよぶ。

定義 1.1 $\Lambda \subset \mathbf{Z}^D$を与えられた有限格子、$f$を$\Lambda$から$A$への写像とする。任意の$x \in X$について一様に$(\tau x)_i = f(x_{i+j}; j \in \Lambda)$となる。

すなわち、CAは空間的に一様な規則fで時間発展を決める格子上の力学系である。一次元系$D = 1$で$A = \{0, 1\}$としτを$(\tau x)_i = x_{i-1} + x_{i+1} \bmod 2$とすれば、簡単な例となる。コンウエイのLIFEをはじめ、個々の規則については様々なものが提唱され、研究されてきた。系統的な数値実験としてはウォルフラムが有名である。

以下ではCAの挙動を格子上の平行移動(シフト)と関連付けて調べる手段を紹介する。定義1.1はCAの直接的な定義であるが、次の定義はこれと同値である。

定義 1.2 $A^{\mathbf{Z}^D}$上の連続写像τが各方向のシフトσ_i, $(i = 1, \cdots, D)$と可換となるとき、*CA*とよぶ。

シフトとの可換性を利用することで、数値実験で見られる挙動の性質をエルゴード理論の立場から捉えることができる。今後は全て一次元格子上で考える。

2 シフトの熱力学的量とCAのダイナミクス

2.1 エントロピーの減少率

$X_0 = A^{\mathbf{Z}}$とおき、$X_n = \cap_{k=1}^{n} \tau^k X_0$を考えよう。$X_n$はランダムな初期配置から$\tau$の$n$ステップ作用後に許容される配置の全体であり、各$n$についてシフト不変集合となる。

エントロピーの時間発展を、$\nu = \mu \circ \tau^{-1}$として$h_\mu \to h_\nu$で定義する。つまり、エントロピーは格子上の確率測度の時間発展を反映するものと考える。まず、エントロピーの定義をあたえよう。

定義 2.1 μをシフト不変集合$X \subset X_0$上のシフト不変確率測度とする。エントロピーh_μは

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{a_1,\cdots,a_n \in A} \mu[a_1, \cdots, a_n] \log \mu[a_1, \cdots, a_n]$$

と定義する。ここで、$[a_1, \cdots, a_n] = \{x = (x_i)_{i\in\mathbf{Z}} \in A^{\mathbf{Z}}; x_1 = a_1, \cdots, x_n = a_n\}$であり、$\mu[a_{-n}, \cdots, a_n]$は単語$a_{-n}, \cdots, a_n$の出現確率を表す。

このとき、エントロピーの時間発展 (減少度) について、

$$h_\mu(X_{n+1},\sigma) \le h_\nu(X_n,\sigma) + \int_{X_n} h_d d\nu.$$

ここで、$d(w) = \#f^{-1}_{|w|}(w)$ は単語 w の多重度といい、$f_{|w|}(w)$ は w を像にもつ単語の全体を表す。$d(w)$ の指数関数的な発散のレートは次の極限であり、

$$h_d(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(w_n(y)) \tag{2}$$

これは $\nu - a.e.$ で存在する。また、確率測度として配位空間の平衡状態を与える Gibbs 測度をとれば、この不等式の等号が成立する。$A^{\mathbf{Z}}$ 上の Gibbs 測度とは、$A^{\mathbf{Z}}$ 上の連続関数 $U(x)$ を決めた時に $P, C_1, C_2 > 0$ として

$$C_1 \le \frac{\mu([x_0 \cdots x_{m-1}])}{\exp(-mP - \sum_{i=0}^{m-1} U(\sigma^i x))} \le C_2$$

となるものである。ここで $(\sigma x)_j = x_{j+1}$ は平行移動を表す写像であり、Gibbs 測度はポテンシャル関数 U による歪みのもとで一様な単語の出現確率を表している。

以上はシフトの測度論的エントロピーの時間変化に関する議論であり、個別の規則 f に関わらず成立するものであった。

2.2 不変集合とワードエントロピーの減少率

もう少し規則に条件をつけて議論を続ける。次の条件を満たすシフト不変かつ τ 不変集合 Y を単に不変集合と呼ぼう。

1. Y に τ を制限すると恒等写像になると仮定する。
2. $x \in Y$ に対して任意の有限な摂動 γ を加えても、有限の N が存在して $\tau^n \gamma x \in Y$ となる。
3. 上の摂動の幅を $w(\gamma x)$ とすると、$w(\gamma x) > w(\tau\gamma x)$

不変集合の安定性を示す指標を定義しよう。

定義 2.2 Γ を有限摂動全体とし、r,r_1,r_2 を以下で定義する。

$$\begin{aligned} r(n,x) &= \min_{\gamma\in\Gamma, w(\gamma x)=n} \{N; \tau^N(\gamma x) \in Y\} \\ r_1(n) &= \sup_{x\in Y} r(n,x) \\ r_2(n) &= \inf_{x\in Y} r(n,x) \end{aligned}$$

シフトのワードエントロピー

$$h(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \# W(X,n)$$

について、$r_1(n)$ と $r_2(n)$ とが高々定数倍しか異ならない場合、$h(X_n) - h(X_\infty)$ は 0 に収束するが、その収束の rate は不変集合の安定性 r によって決まると思われる。

現在、それぞれ $O(e^{-nC})$, $O(e^{-\sqrt{n}C})$, $O(n^{-1}C)$ (C は定数) という挙動を示す例が構成できている。これは、V を有限座標のみに依存する関数とした場合に、ワードエントロピーのかわりに位相圧力 (自由エネルギー)$P(V, X_n)$ をとっても成り立っている。

この rate が遅いほど、数値実験で見ることのできる軌道は複雑な構造が長く維持されるように観測される。つまり、局在化した軌道が長く維持されるので、ウォルフラムの提唱したクラス 4 の一面をとりだしていると予想している。

参考文献

[1] G.A.Hedlund, *Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical System*, Math. Systems Theory 3 (1969) 320-375

[2] T.Namiki *The Degree Function for Cellular Dynamics*, Proceedings of Japan Academy 71 A 1(1995)

[3] M.Nasu, *Textile Systems for Endomorphisms and Automorphisms of the Shift*, to appear in Memoirs of American Mathematical Society.

[4] S.Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific (1984)